第４講　熱力学・原子分野

7

図のように，なめらかに動くピストンを持つシリンダーが鉛直に置かれており，シリンダー内には単原子分子理想気体が封入されている。シリンダーとピストンは厚さと重さが無視できる断熱材でできている。気体が封入されているシリンダー内には，体積の無視できるヒーターがついている。ピストンの上には水をためることができ，また，排水口Ａに達した水はシリンダー外へ排出される。

ピストンの上に水を深さdまでためたとき，ピストンは底面からの高さhでつりあった。このとき，気体の温度は絶対温度T_1であり，水面は排水口Ａよりもℓだけ低い位置にあった(状態１)。次に，ヒーターを用いて気体を加熱すると，ピストンはゆっくり上昇して水面がＡに到達した(状態２)。ピストンがゆっくり上昇するようにさらに加熱を続けると，Ａから水が少しずつ排出され，ピストンがＡに達したところで加熱を止めた(状態３)。シリンダーの断面積をS，水の密度をρ，大気圧をP_0，重力加速度をgとして以下の問いに答えよ。

(1)　状態１，２，３での気体の圧力P_1，P_2，P_3をそれぞれ求めよ。

(2)　状態２での気体の温度T_2は，状態１での気体の温度T_1の何倍か答えよ。

(3)　状態３での気体の温度T_3は，状態１での気体の温度T_1の何倍か答えよ。

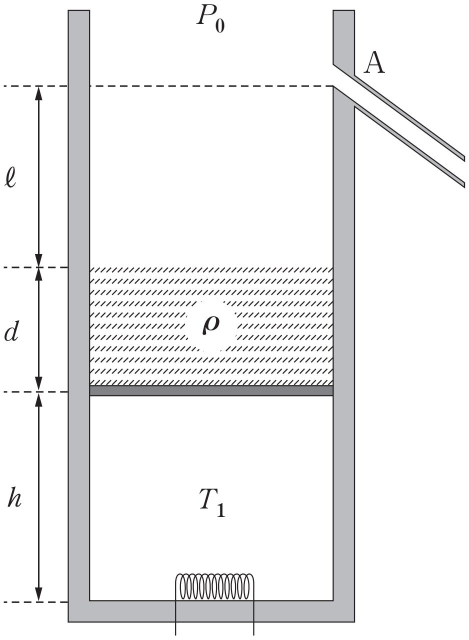
(4)　状態１から状態２へ変化する間に気体がした仕事W_{12}を求めよ。

(5)　状態１から状態２へ変化する間に気体が受け取った熱量Q_{12}を求めよ。

(6)　状態２から状態３へ変化する間の気体の圧力Pと気体の体積Vの関係式を求めよ。
また，その関係を縦軸にP，横軸にVをとったグラフに示せ。

(7)　状態２から状態３へ変化する間に気体がした仕事W_{23}を求めよ。

(8)　状態２から状態３へ変化する間に気体が受け取った熱量Q_{23}を求めよ。


P_0
A
ℓ
d
ρ
h
T_1

8

水素原子の線スペクトルは，電子と原子核(陽子)の間に働く力に関する基礎的な情報を与える。この力の性質を詳しく調べるため，以下では一つの水素原子内にある電子と原子核の間にはたらく力のみを考え，ボーアの仮説に従って，電子が原子核の位置を中心とした円運動をすると考えよう。プランク定数をh，電子の質量をm，原子核の質量をM，電子の電荷の大きさ(電気素量)をe，真空中のクーロンの法則の比例定数をk_0，万有引力定数をGとする。

ボーアの量子条件とは，電子が原子核を中心として半径rの円運動をしていると仮定した際に，電子の軌道の一周の長さが電子のド・ブロイ波長の自然数倍であるという条件のことである。速さvで運動している電子のド・ブロイ波長は$\lambda = \dfrac{h}{mv}$で与えられる。以下の問に答えよ。

問１　ボーアの量子条件から，電子の速さvを，h，m，r，および自然数nを用いて表せ。

問２　水素原子内で，電子は原子核からクーロン力を受ける。円運動の運動方程式とボーアの量子条件から，電子の軌道半径rが求まる。最小の軌道半径(ボーア半径)を，k_0，m，e，hを用いて表せ。

問３　電子と水素原子核の間には，万有引力も働いているはずである。ニュートンの万有引力とクーロン力の大きさの比sは，$s = \dfrac{GMm}{k_0 e^2}$と与えられる。クーロン力に加えてニュートンの万有引力も考慮したとき，最小の軌道半径は，万有引力を考慮しないときに比べて何倍になるか。sを用いて表せ。

実は，物体間の距離がおよそ0.1ミリメートルよりも短い場合には，ニュートンの万有引力の法則は実験的に確認されていない。そこで，万有引力の法則に修正が必要な可能性を探ってみよう。力の大きさFが式(1)のように距離rの３乗に反比例する仮想的な修正万有引力の法則を考える。

$$F = G'\frac{Mm}{r^3} \tag{1}$$

力は常に引力であるとし，修正万有引力定数G'は正であるとする。ただし，問２のボーア半径において修正万有引力の大きさはクーロン力の大きさに比べて十分小さいものとする。

問４　このとき，ボーアの量子条件を用いて最小の軌道半径を求めると，問２の結果に比べて$(1-\delta)$倍になった。正の定数δを，h，m，M，G'，k_0，eのうち必要なものを用いて表せ。

問５　式(1)で表される修正万有引力の法則は，通常のニュートンの万有引力の法則とは異なっている。（この違いは空間次元数の変化に対応していることが知られている。）そこで，ある距離Rを境に，長距離$(r>R)$では通常の万有引力の法則であるが，近距離$(r<R)$では修正万有引力の法則(1)になっていると考えよう。これらの法則の間に矛盾がないためには，距離$r=R$においてそれぞれの法則が同じ大きさの力を与える必要があるため，次の式が成立するとしよう。

$$G\frac{Mm}{R^2} = G'\frac{Mm}{R^3}$$

例として$R=1\times10^{-4}$メートルと仮定する場合に，問３で導入したsの観測値が$s \fallingdotseq 4\times10^{-40}$であることと，問２の最小軌道半径がおよそ$5\times10^{-11}$メートルであることを用いて問４の$\delta$の値を有効数字１桁で求めよ。

第４講　解答

7

(1) $P_1 = P_2 = P_0 + \rho dg$　　$P_3 = P_0$

(2) $\dfrac{h+l}{h}$(倍)

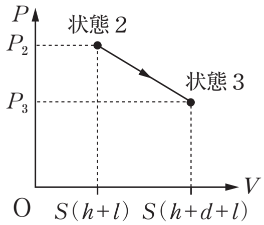
(3) $\dfrac{P_0(h+d+l)}{(P_0+\rho dg)h}$(倍)

(4) $(P_0+\rho dg)Sl$

(5) $\dfrac{5}{2}(P_0+\rho dg)Sl$

(6) 関係式：$P = P_0 + \rho\left(h+d+l-\dfrac{V}{S}\right)g$

グラフ：



(7) $\dfrac{1}{2}Sd(2P_0+\rho dg)$

(8) $\dfrac{5}{2}P_0Sd + \dfrac{1}{2}Sd(d-3h-3l)\rho g$

8

問１　$n\dfrac{h}{2\pi rm}$

問２　$\dfrac{h^2}{4\pi^2 k_0 e^2 m}$

問３　$\dfrac{1}{1+s}$(倍)

問４　$\dfrac{4\pi^2 G' Mm^2}{h^2}$

問５　8×10^{-34}